



UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématique

Option : Équations aux dérivées partielles et applications

Présenté par

DJEMAI Wahiba

Sujet

**Existence et multiplicité des solutions pour un
problème aux limites de second ordre par la
méthode variationnelle**

Soutenu le : 20/06/2018

Devant le jury :

Mr. Abd elhamid TALLAB

M.C.B. Univ de M'sila

Président

Mr. Dahmane BOUAFIA

M.A.A. Univ de M'sila

Rapporteur

Mr. Abdelhak MOKHTARI

M.C.B. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2017/2018

REMERCIEMENTS

*Tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant de ma savoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire **Mr : Dahmane BOUAFIA** . Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.*

*Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail, **Mr : Abdelhamid TALLAB** en étant président du jury et **Mr : Abdelhak MOKHTARI** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents : **Abd elKadeur** et **Fatima** (j'espère à leur la miséricorde) surtout ma mère qui a attendu ce moment, la soutenance de sa fille, mais malheureusement, elle est partie sans assister à cet instant, il y a quelque mois depuis qu'elle quitté ce monde et elle laissé ses espoirs prendre sur moi, donc ce travail sera en l'honneur de la grande femme ma mère et le saint-père mon père.*

Aussi, je n'oublie pas le soutien et l'encouragement de ma famille, mes frères, en particulier mon marie et mes amies pour ses présences dans les moments difficiles et grâce à qui j'ai passé d'excellents moments. Enfin, je remercie toutes les personnes qui nous ont aidés et soutenue de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Notation	iv
Introduction générale	1
I Préliminaires	4
I.1 Quelques outils de base	4
I.1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach	4
I.1.2 Continuité des opérateurs	5
I.1.3 Semi-continuité	6
I.1.4 Opérateurs différentiables	7
I.1.5 Opérateurs monotones et fortement monotones	12
I.1.6 Les espaces L^P	13
I.1.7 Théorème classique de compacité	14
I.2 Théorie spectrale	14
I.2.1 Espace de Hilbert	14
I.2.2 L'opérateur adjoint et auto-adjoint	14
I.2.3 L'opérateur racine carrée	15
I.2.4 Valeurs propres et vecteurs propres d'opérateurs compacts	15
I.2.5 Décomposition spectrale d'opérateurs auto-adjoints compacts	16
II Existence des solutions pour BVP par principe des opérateurs fortement monotones	18
II.1 Introduction	18

II.2	Préliminaires	18
II.3	Résultats principaux	24
III	Existence des solutions pour BVP par la théorie de point critique	28
III.1	Introduction	28
III.2	Préliminaires	28
III.3	Résultats principaux	31
III.4	Exemples d'application	38
	Conclusion	39
	Bibliographie	vi

NOTATION

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$L^p(\Omega)$	$= \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : u ^p \in L^1(\Omega) \right\}$ avec $1 \leq p < \infty$.
$\ u\ _{L^p}$	$= \left(\int_{\Omega} u(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$.
$\ u\ _{L^\infty}$	$= \inf \{ C : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω .
\mathcal{H}	Espace de Hilbert.
X'	Dual topologique de X .
$K^{\frac{1}{2}}$: opérateur racine carré de l'opérateur K .
$D(A)$: Domaine de définition d'un opérateur borné A .
$N(A)$: Noyau de A qui est noté aussi par $\ker A$.
$R(A)$: Image de A qui est noté aussi par $Im A$.
$VP(A)$: Ensemble des valeurs propres de l'opérateur A .
$\mathcal{L}(X, Y)$: Ensemble des applications linéaires continues.
$\rho(A)$	$= \{ \lambda \in \mathbb{R}; (A - \lambda I) \text{ est bijectif de } X \text{ sur } X \}$ et on l'appelle ensemble résolvant de l'opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$.
$\sigma(A)$	$= \mathbb{R} \setminus \rho(A)$ et on l'appelle le spectre de A .
\hookrightarrow	Injection.
p.p	Presque partout.
(P.S)	Condition de Palais-Smale.
$\partial_v F$	Dérivée directionnelle de F dans la direction v .

dF	Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par F' .
d_GF	Dérivée au sens de Gâteaux.
N_f	Opérateur de Nemytskii.
BVP	Problème aux limites de second ordre.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires jouent un rôle important dans la théorie de la physique mathématique. Le but de ce travail est d'étudier l'existence, l'unicité et la multiplicité des solutions pour un problème aux limites associé aux équations différentielles ordinaires du second ordre et ceci en utilisant plusieurs techniques qui sont basées sur les méthodes variationnelles, telles que le lemme du col, ainsi que la théorie des opérateurs fortement monotones.

Depuis la naissance du calcul des variations, on s'est rendu compte que lorsqu'elles s'appliquent, les méthodes variationnelles peuvent obtenir des résultats qui peuvent parfois être plus efficaces que beaucoup d'autres méthodes. En outre, elles s'appliquent à un très grand nombre de situations. Il a été démontré, il y a plusieurs décennies, que les solutions de beaucoup de problèmes sont en fait des points critiques de certaines fonctionnelles.

Dans ce mémoire, on présente quelques-uns des travaux dans l'article [3] qui utilisent la théorie de point critique pour étudier des problèmes aux limites. Beaucoup de nouveaux résultats ont été obtenus récemment par des chercheurs, en utilisant cette approche et dans certains cas, des résultats semblables n'ont pas été obtenus par d'autres méthodes.

Dans les applications, on établit que la solution proposée d'un problème aux limites est un point critique d'une certaine fonctionnelle J sur un espace approprié, c'est-à-dire un point u dans l'espace où $J'(u) = 0$. Trouver les points où les dérivées s'annulent se ramène à la résolution du problème.

Certains auteurs ont étudié les équations différentielles du second ordre en utilisant des méthodes variationnelles, et ils ont obtenu beaucoup de résultats. Dans [5] et [6], la technique que les auteurs ont employée est de transformer le problème aux limites en une équation

intégrale avec un noyau défini positif (toutes les valeurs propres sont positives). Le mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons donné quelques outils de base qui sont utilisés par la suite. Nous avons divisé le travail en trois sections. Dans la première section, nous avons abordé quelques caractéristiques d'opérateurs comme la continuité, la différentiabilité, les opérateurs de Nemytskii, les opérateurs fortement monotones ainsi que les propriétés de semi-continuité de fonctionnelles. Nous avons donné aussi un rappel sur le théorème de compacité dans l'espace $C([0, 1]; \mathbb{R})$ (théorème d'Ascoli-Arzelà).

Dans la deuxième section, nous avons présenté la théorie spectrale d'un opérateur compact. Et nous avons présenté dans la troisième section la théorie de point critique ainsi que la théorie de minimisation.

Dans le chapitre deux, nous avons présenté le travail [3], où des résultats d'existence de solutions pour le problème aux limites de second ordre suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), & x \in [0, 1], \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

sont obtenus.

Le principe des opérateurs fortement monotones employés pour discuter ce problème.

Le premier résultat dit que si pour chaque $x \in [0, 1]$, $f(x, u)$ est une fonction décroissante en u , c'est-à-dire $f(x, u_1) \geq f(x, u_2)$ pour tous les u_1 et u_2 en \mathbb{R} avec $u_1 \leq u_2$, alors le problème (1) a une solution unique dans $C^2[0, 1]$.

Pour la démonstration, on a utilisé le principe des opérateurs fortement monotones.

Le second résultat dit que, s'il existe une constante $a \in [0, \pi^2/4)$, telle que

$$[f(x, u) - f(x, v)][u - v] \leq a|u - v|^2, \quad \text{pour tout } x \in [0, 1], \text{ et } u, v \in \mathbb{R},$$

alors le problème (1) admet une solution unique dans $C^2[0, 1]$.

Ici, le même principe des opérateurs fortement monotones est employé.

Dans le chapitre trois, nous avons discutés l'existence et la multiplicité de solution pour le problème précédente (1), dans ce cas, nous avons trouvé que

Le premier résultat dit que si

$$\int_0^u f(x, v)dv \leq \frac{a}{2}u^2 + b(x)|u|^{2-\gamma} + c(x), \quad x \in [0, 1], u \in \mathbb{R},$$

où $a \in [0, \pi^2/4)$, $\gamma \in (0, 2)$, $b \in L^{\frac{2}{\gamma}}[0, 1]$ et $c \in L^1[0, 1]$, alors le problème aux limites (1) admet au moins une solution dans $C^2[0, 1]$.

La démonstration de ce résultat est basée sur le principe de minimisation.

Le deuxième résultat dit que sous les conditions suivantes sur la fonction f :

(H_1) il existe $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ et $M > 0$, tel que $\int_0^u f(x, v) dv \leq \mu u f(x, u)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et

$$|u| \geq M,$$

(H_2) $\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} < \frac{1}{\lambda_1}$ et $\liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u} > \frac{1}{\lambda_1}$ uniformément par rapport à $x \in [0, 1]$,

alors le problème (1) a au moins une solution non nulle dans $C^2[0, 1]$.

Pour la démonstration, on a utilisé le théorème du Col qui a été établi par Ambrosetti-Rabinowitz en 1973 dans [8] où on a vérifié la condition de Palais-Smale (P.S) ainsi que les conditions géométriques pour une fonctionnelle appropriée.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaire par la suite.

I.1 Quelques outils de base

I.1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

Soit X et Y deux espaces de Banach normés.

Définition I.1. (*Opérateur linéaire borné*) Soit A un opérateur linéaire, tel que $D(A) = X$ et $R(A) \subset Y$. On dit que A est borné, s'il est borné sur la boule unité $\bar{B}(0, 1)$. C'est-à-dire, si l'ensemble $\{\|Ax\|, \|x\| \leq 1\}$ est borné.

Conformément à cette définition, si A est borné, il existe une constante $c > 0$, telle que pour tout x avec $\|x\| \leq 1$, on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c.$$

Théorème I.1. [11] Soit A un opérateur linéaire, A est borné, si et seulement si, il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \text{ pour tout } x \in X.$$

Définition I.2. (*Espace dual*)[10] L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de

l'espace X et on note X' . On munit X' de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|, \quad \forall f \in X'.$$

X' muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X', \quad \forall x \in X.$$

Définition I.3. (Convergence faible) On dit qu'une suite $(x_n) \in X$ converge faiblement vers x , si

$$\forall f \in X', \quad \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle,$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition I.1. [4] Soit (x_n) une suite de X . On a

1. Si $x_n \longrightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$.
2. Si $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$, c'est-à-dire la fonctionnelle $x \mapsto \|x\|$ est semi-continue inférieurement.

Proposition I.2. [4] Lorsque X est de dimension fini, une suite (x_n) converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.

Définition I.4. Soit X un espace de Banach et soit \mathbf{i} l'injection canonique de X dans X'' . on dit que X est réflexif, si $\mathbf{i}(X) = X''$.

Où X'' est le bidual de X .

Théorème I.2. [4] Un espace de Banach X est réflexif, si et seulement si, sa boule fermée est faiblement compacte.

Corollaire I.1. [4] Si X est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\| \leq M$ contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq M$.

I.1.2 Continuité des opérateurs

On va considérer des opérateurs T de X dans Y et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T .

La notion plus simple est la suivante

Définition I.5. L'opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit continu en x , si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x , $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.

T est dit continu sur $\Omega \subset X$ si T est continu en tout point $x \in \Omega$.

Définition I.6. Un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit compact si, pour toute suite (x_n) bornée dans X , la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.

Définition I.7. Soit $(X, \|\cdot\|_1)$ et $(Y, \|\cdot\|_2)$ deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit complètement continu, s'il est continu et l'image de tout ensemble borné de X est relativement compact dans Y .

I.1.3 Semi-continuité

Définition I.8. 1. On dit qu'une fonctionnelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point x_0 , si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightarrow x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. Une fonctionnelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i.) au point x_0 , si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

3. On dit que f est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point x_0 , si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightarrow x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

4. On dit que f est faiblement semi-continue supérieurement au point x_0 , si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Exemple I.1. Soit la fonctionnelle J définie sur un espace de Hilbert \mathcal{H} comme suit

$$J : u \rightarrow \|u\|^2,$$

alors, J est faiblement semi-continue inférieure (f.s.c.i.). En effet, soit (u_n) , telle que $u_n \rightharpoonup u$, on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

et comme $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ et $u_n \rightharpoonup u$, donc

$$\forall u \in \mathcal{H} : (u_n, u) \rightarrow (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

Remarque I.1. 1. Il est facile de voir que si f est continue en x_0 , alors f est (s.c.s.) et (s.c.i.) et inversement.

2. Si f est faiblement continue en x_0 , alors f est (f.s.c.s.) et (f.s.c.i.) et inversement.

I.1.4 Opérateurs différentiables

Définitions et propriétés fondamentaux

La dérivée au sens de Fréchet

Soient X et Y deux espaces de Banach, U un ouvert de X .

Définition I.9. Soit $u \in U$ et $F : U \rightarrow Y$. On dit que F est différentiable au point u , s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que si on considère

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A.h, \quad \text{pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } \|h\| \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que si } \|h\|_X \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u) = F'(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de F en u , ou encore application linéaire tangente à F en u . En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

Exemples I.1. 1. Si $F(u) = c$. Alors F Fréchet différentiable et $dF(u) = 0$, $\forall u \in X$.
 2. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $A(u + h) - A(u) = A.h$ et donc $dA(u) = A$, $\forall u \in X$.
 3. Si $X = H$ est un espace de Hilbert et $F(u) = \|u\|^2 = \langle u, u \rangle$, alors

$$dF(u)h = 2\langle u, h \rangle.$$

Proposition I.3. [8]

i) Soit F et G deux applications de U vers Y . Si F et G sont différentiables en $u \in U$. Alors $\forall \lambda, \mu$ réels, $\lambda F + \mu G$ est différentiable en u , et

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u),$$

ii) Soit X, Y, Z trois espaces de Banach, U un ouvert de X , V un ouvert de Y . Soit $F : U \rightarrow Y$ et $G : V \rightarrow Z$, tels que $F(U) \subset V$. Si F est différentiable en u et G est différentiable en $v = F(u)$, alors $G \circ F$ est différentiable en u et

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$

c'est-à-dire

$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$

La différentielle de $G \circ F$ est donc la composition des applications linéaires continues $dF(u)$ et $dG(v)$, pour $v = F(u)$.

Différentiabilité au sens de Gâteaux

Commençons par définir la notion de dérivée directionnelle.

Définition I.10. Soit $F : U \rightarrow Y$, $u \in U$. Soit $v \in X$, $v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle en u de F dans la direction v , notée $\partial_v F(u)$, la limite lorsqu'elle existe.

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si F est Fréchet différentiable, alors pour tout $v \in X$, la dérivée directionnelle dans la direction v est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

En effet,

$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} &= dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t}, \\ \frac{R(tv)}{t} &\rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Définition I.11. On dit que $F : U \rightarrow Y$ est Gâteaux différentiable en u (G -différentiable en u), s'il existe une application linéaire continue A de X vers Y , c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que pour tout $v \in X$, la dérivée directionnelle de F en u dans la direction v existe et est égale à $A(v)$, c'est-à-dire

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \rightarrow 0, \quad \forall u \in X.$$

On vérifie, alors que, si une telle application A existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u).$$

Proposition I.4. [8] Si F est Fréchet différentiable en u , elle est Gâteaux différentiable en u et

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

La réciproque est fausse en général, même en dimension finie.

On a un contre exemple.

Exemple I.2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \left[\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right]^2, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

La G -différentiabilité n'implique pas la continuité de F (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).

D'autre part, si on sait que F est C^1 au sens de Gâteaux, alors F est Fréchet différentiable sur U et les deux notions coïncident et on a

Théorème I.3. [8] Soit $F : U \rightarrow Y$ une application G -différentiable (U ouvert de X). On suppose que l'application $v \mapsto d_G F(v)$ est continue sur U . Alors, F est Fréchet différentiable sur U et

$$dF(v) = d_G F(v), \quad \forall v \in U.$$

Remarque I.2. *En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que F est C^1 , il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable d_GF est continue.*

Proposition I.5. [2] *Soit X est un espace de Banach réel réflexif et soit $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Si J' existe (Gâteau-différentiable) et J' est fortement continue ou compacte, alors J est faiblement continue.*

Opérateur de Nemytskii

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N et soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, s) \mapsto f(x, s), \quad \forall x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Définition I.12. *On appelle opérateur de Nemytskii associé à f , l'application N_f qui à une fonction mesurable u définie sur Ω associe la fonction $v = N_f(u)$ définie sur Ω par*

$$v(x) = f(x, u(x)), \quad \forall x \in \Omega.$$

Dans la suite, on confond N_f et f et écrirons $v = f(x, u)$.

Proposition I.6. [8] *Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , et f une fonction continue de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} N_f : C(\bar{\Omega}) & \rightarrow & C(\bar{\Omega}) \\ u & \mapsto & N_f u \end{array}$$

définie par $N_f u(x) = f(x, u(x))$ est continue et borné de $C(\bar{\Omega})$ vers $C(\bar{\Omega})$.

Preuve.

Étape 1 : N_f est bien défini. En effet,

soit la suite $(x_n) \subset \bar{\Omega}$, on supposons que $x_n \rightarrow x$, quand $n \rightarrow +\infty$.

Comme u est continue sur $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire

$$(x_n, u(x_n)) \rightarrow (x, u(x)) \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega} \times C(\bar{\Omega}).$$

Alors d'après la continuité de f au point $(x, u(x))$, on a

$$N_f u(x_n) = f(x_n, u(x_n)) \rightarrow f(x, u(x)) = N_f u(x), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Étape 2 : N_f est borné.

Soit $K \subset C(\bar{\Omega})$ est une ensemble bornée, on montre que $N_f(K)$ est bornée dans $C(\bar{\Omega})$. C'est-à-dire

$$\exists M > 0, \quad \text{tel que } \forall u \in K : \|N_f u\|_C \leq M. \quad (*)$$

Comme K est une ensemble bornée dans $C(\bar{\Omega})$, alors

$$\exists R > 0, \forall u \in K : \|u\|_C \leq R.$$

D'après la continuité de f , alors on a

$$|f(x, u(x))| \leq \sup_{(\tau, y) \in \bar{\Omega} \times [-R, R]} |f(\tau, y)| \leq M.$$

Donc

$$\|N_f u\|_C = \sup_{(\tau, y) \in \bar{\Omega} \times [-R, R]} |f(\tau, y)| \leq M,$$

c'est-à-dire $(*)$ est vérifié.

Étape 3 : N_f est continu, en effet.

Puisque f est continue uniformément sur les ensembles compacts de la forme

$$\{(x, y) \in \bar{\Omega} \times C(\bar{\Omega}) : |y - u(x)| \leq 1\},$$

pour $u \in C(\bar{\Omega})$, alors N_f est aussi continue sur $C(\bar{\Omega})$ (voir[7]).

■

Proposition I.7. [8] *Soit X un espace de Banach, et F une application de X vers \mathbb{R} , soit $u \in X$. On suppose que*

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v),$$

c'est-à-dire

$$F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in X.$$

Alors, si F est Gâteaux-différentiable en u , on a

$$d_G F(u) = 0.$$

Définition I.13. *Soit $u_0 \in X$. On dit que u_0 est un minimum local pour F , si il existe $\delta > 0$, tel que*

$$F(u_0) \leq F(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta).$$

On a, alors

Proposition I.8. [8] *Soit $u_0 \in X$, un minimum local de F . Alors si F est Gâteaux-différentiable en u_0 , alors*

$$d_G F(u_0) = 0.$$

Définition I.14. Soit $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que J est coercive, si

$$J(u) \rightarrow +\infty, \text{ lorsque } \|x\| \rightarrow +\infty.$$

C'est-à-dire

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \text{ tel que } \|u\| \geq B \text{ entraine } J(u) \geq A.$$

Définition I.15. Soit J une fonctionnelle différentiable de X vers \mathbb{R} . Un point $u \in X$ est dit critique pour J , si et seulement si

$$dJ(u) = 0.$$

Définition I.16. On appelle valeur critique de la fonctionnelle J de classe C^1 définie sur X , un nombre $c \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $u \in X$, tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

I.1.5 Opérateurs monotones et fortement monotones

Définition I.17. L'opérateur $A : X \rightarrow X'$ est appelé monotone, si pour tous $x, y \in X$, on a

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0.$$

Définition I.18. L'opérateur $A : X \rightarrow X'$ est appelé strictement monotone, si

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle > 0, \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y.$$

Définition I.19. L'opérateur $A : X \rightarrow X'$ est appelé fortement monotone, si

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq c(\|x - y\|)\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Où $c(t)$ est une fonction continue positive définie pour $t \geq 0$, telle que $c(0) = 0$, et $c(t) > 0$ pour tout $t > 0$, $c(t) \rightarrow +\infty$ pour $t \rightarrow +\infty$.

En particulier, si $c \equiv I$, alors l'opérateur $A : X \rightarrow X'$ est fortement monotone, s'il existe une constante $C > 0$, tel que

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq C\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

Définition I.20. [11] L'opérateur $A : X \rightarrow X'$ est dit coercif, si pour tout $x \in X$

$$\langle A(x), x \rangle \geq \gamma(\|x\|)\|x\|,$$

où $\gamma(x)$ est une fonction définie pour $x \geq 0$, telle que $\gamma(x) \rightarrow +\infty$ pour $t \rightarrow \infty$.

Lemme I.1. [11] Tout opérateur $A : X \rightarrow X'$ fortement monotone est coercif, avec

$$\gamma(x) = c(x) - \|A(0)\|.$$

I.1.6 Les espaces L^p

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue dx et on désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace de fonction intégrables sur Ω à valeur dans \mathbb{R} . On pose

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx, \text{ ou } \|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f|.$$

Théorème I.4. (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*)[4] Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

a) $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω .

b) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω .

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Théorème I.5. (*Théorème de Fubini*)[4] Soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts dans \mathbb{R}^N et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle mesurable, on suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2),$$

de plus, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy &= \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \\ &= \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Définition I.21. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note $\|f\|_{L^p} = (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme.

Définition I.22. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème I.6. [4] L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$ et son dual est L^q , tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème I.7. (Inégalité de Cauchy-Schwartz)[4] Soit f et $g \in L^2(\Omega)$. Alors on a

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

I.1.7 Théorème classique de compacité

Théorème I.8. (Ascoli-Arzelà)[11] Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un espace métrique compact (X, d) et à valeurs réelles. On suppose que la suite (f_n) a les deux propriétés suivantes

1. (f_n) est équicontinue, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \eta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon,$$

2. La suite $(f_n(x))_n$ est bornée pour tout $x \in X$. Alors, il existe une sous-suite de (f_n) qui converge vers une fonction continue f dans $C(X, \mathbb{R})$.

I.2 Théorie spectrale

I.2.1 Espace de Hilbert

Soit \mathcal{H} est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $(., .)$.

I.2.2 L'opérateur adjoint et auto-adjoint

Définition I.23. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, X un espace de Banach et X' le dual de X . On note par $(., .)$ à la fois produit scalaire de \mathcal{H} et de la dualité entre X et X' , c'est-à-dire la fonctionnelle bilinéaire sur $X' \times X$ défini par

$$(v', v) = v'(v) \text{ pour tout } v' \in X', v \in X.$$

Proposition I.9. [9] *Pour chaque opérateur linéaire borné $A : \mathcal{H} \rightarrow X$, il existe un unique opérateur linéaire borné $A' : X' \rightarrow \mathcal{H}$, tel que*

$$(A(u), v') = (u, A'(v')), \text{ pour tout } u \in \mathcal{H} \text{ et } v' \in X'.$$

Définition I.24. *L'opérateur A' donné par la proposition ci-dessus est appelé opérateur adjoint de A .*

Définition I.25. *Un opérateur linéaire borné $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est dit auto-adjoint, si $A = A'$, c'est-à-dire*

$$(A(u), v) = (u, A(v)), \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Définition I.26. *Un opérateur linéaire $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est dit positif $A \geq 0$, si*

$$(A(u), u) \geq 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{H}.$$

I.2.3 L'opérateur racine carrée

Définition I.27. *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur positif auto-adjoint, un opérateur positif auto-adjoint $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est dit la racine carrée de A , si $B^2 = A$, on note $A^{\frac{1}{2}}$.*

Proposition I.10. [9] *Pour chaque opérateur positif auto-adjoint A , la racine carrée B de A existe et est unique. De plus, si A est complètement continu, alors B est complètement continu aussi.*

Proposition I.11. [9] *Si $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur positif et auto-adjoint, alors*

$$|(Au, v)|^2 \leq (Au, u)(Av, v).$$

I.2.4 Valeurs propres et vecteurs propres d'opérateurs compacts

Théorème I.9. [11] *Si A est un opérateur compact, le sous-espace propre X_λ associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$ de A est de dimension finie.*

Théorème I.10. [11] *Soit A un opérateur compact sur X , alors pour tout ε strictement positif, il ne reste dans le plan complexe (ou sur la droite réelle) en dehors d'un disque $|\lambda| \leq \varepsilon$ qu'un nombre fini de valeur propre de A .*

Valeurs propres et vecteurs propres d'opérateurs linéaires auto-adjoints compacts

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint compact sur \mathcal{H} . On connaît déjà beaucoup de choses sur les valeurs propres et les vecteurs propres d'un tel opérateur, entre autres.

Théorème I.11. [11] *Si A est non nul, il admet au moins une valeur propre non nulle.*

Théorème I.12. [11] *Tout opérateur linéaire compact A a toutes ses valeurs propres réelles et appartient dans $[m, M]$, où*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Si M est non nul, c'est la plus grande valeur propre de A , si m est non nul, c'est la plus petite valeur propre de A .

Corollaire I.2. [11] *Si A est un opérateur linéaire auto-adjoint compact sur \mathcal{H} , on a $\|A\| = |\lambda_1|$, où λ_1 est la plus grande (en module) valeur propre de A , en particulier, cela est vrai pour tout opérateur auto-adjoint dans un espace euclidien (c'est-à-dire, espace de Hilbert de dimension finie).*

Théorème I.13. [1] *Supposons que A est un opérateur linéaire compact, symétrique et $A \neq 0$. Alors $\|A\|$ ou $-\|A\|$ est une valeur propre de A .*

I.2.5 Décomposition spectrale d'opérateurs auto-adjoints compacts

Théorème I.14. (*Théorème de Hilbert-schmidt*)[10] *Pour tout opérateur linéaire compact auto-adjoint A dans un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} , il existe un système orthonormé (e_k) de vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles (λ_k) , tel que tout élément $u \in \mathcal{H}$ peut s'écrire de manière unique, sous la forme*

$$u = \sum_k \lambda_k e_k + u',$$

où $u' \in \ker A$, c'est-à-dire $Au' = 0$, en outre

$$Au = \sum_k \lambda_k c_k e_k,$$

et si la suite (e_k) est infinie, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = 0.$$

Corollaire I.3. [11] *Si l'opérateur auto-adjoint compact A est inversible, ses valeurs propres peuvent former une base dans \mathcal{H} .*

Corollaire I.4. [11] *Si A est un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} , il existe dans \mathcal{H} une base orthonormée formée des vecteurs propres de A .*

Corollaire I.5. [11] *Si $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ (au sens de la norme de $\mathcal{L}(X, Y)$), où les A_n sont des opérateurs compacts ou de dimension finie, A est un opérateur compact.*

Définition I.28. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. L'ensemble résolvant est*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}, (A - \lambda I) \text{ est bijectif de } X \text{ sur } X\}.$$

Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$.

On dit que λ est valeur propre et on note $\lambda \in VP(A)$, si

$$N(A - \lambda I) \neq 0.$$

$N(A - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ où N est noyau de A , c'est-à-dire $\ker A$.

Il est important de retenir que si $\lambda \in \rho(A)$, alors $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Remarque I.3. *Il est clair que $VP(A) \subset \sigma(A)$, en général l'inclusion est stricte (sauf si $\dim(A) < \infty$), car alors $VP(A) = \sigma(A)$), il peut exister λ , tel que*

$$N(A - \lambda I) = 0, \text{ et } R(A - \lambda I) \neq X,$$

où R est image de A .

Proposition I.12. [4] *Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et*

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|].$$

Théorème I.15. [4] *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur compact, avec $\dim(X) = \infty$, alors, on a*

- $0 \in \sigma(A)$,
- $\sigma(A) \setminus 0 = VP(A) \setminus 0$,
- l'une des situations suivantes
 - a)** ou bien $\sigma(A) = \{0\}$,
 - b)** ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est fini,
 - c)** ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

CHAPITRE II

EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR BVP PAR PRINCIPE DES OPÉRATEURS FORTEMENT MONOTONES

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence des solutions du problème aux limites du second ordre suivant ¹

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), & x \in [0, 1], \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Où $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Dans cette partie, en utilisant le principe des opérateurs fortement monotones, on établit des conditions suffisantes sur f qui sont en mesure de garantir que le problème aux limites (II.1) possède une solution unique, ou au moins une solution non nulle.

II.2 Préliminaires

Dans cette section, on donne quelques notations et lemmes qui sont nécessaires par la suite. Soit $C[0, 1]$ l'espace de Banach réel usuel muni de la norme

$$\|u\|_C = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|, \text{ pour tout } u \in C[0, 1].$$

$L^2[0, 1]$ dénote l'espace de Banach réel réflexif usuel muni de la norme

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } u \in L^2[0, 1],$$

1. D'après : Fuyi Li, Zhanping Liang, Qi Zhang (2005)

qui est aussi un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \text{ pour tous } u, v \in L^2[0, 1].$$

Il est bien connu que la solution du problème au limite (II.1) dans $C^2[0, 1]$ est équivalente à la solution de l'équation intégrale suivante dans $C[0, 1]$.

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s)f(s, u(s))ds, \quad x \in [0, 1]. \quad (\text{II.2})$$

Où $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est la fonction de Green associée au problème linéaire

$$\begin{cases} -u''(x) = 0, & x \in [0, 1], \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

$$G(x, s) = \min\{x, s\} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq s \leq 1, \\ s, & 0 \leq s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On définit les opérateurs $K, N_f : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ respectivement par

$$Ku(x) = \int_0^1 G(x, s)u(s)ds, \quad x \in [0, 1], \quad \forall u \in C[0, 1], \quad (\text{II.3})$$

$$N_fu(x) = f(x, u(x)), \quad x \in [0, 1], \quad \forall u \in C[0, 1].$$

Alors l'équation intégrale (II.2) est équivalente à l'équation opérationnelle

$$u = KN_fu.$$

Remarque II.1. *Il est facile de voir que*

i) $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue et positive,

ii) $G(x, s) = G(s, x)$, pour tout $x, s \in [0, 1]$,

iii) $\max_{(x,s) \in [0,1] \times [0,1]} G(x, s) = 1$,

L'opérateur K défini dans (II.3) peut également être défini sur $L^2[0, 1]$. En effet, on a les lemmes suivants

Lemme II.1. *1. $K : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est un opérateur linéaire complètement continu,*

2. $K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ est également un opérateur linéaire complètement continu.

Preuve. (1)

Étape 1 : K est bien défini.

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, puisque le noyau G est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, il existe $\delta > 0$, tel que $|G(x_1, s) - G(x_2, s)| < \varepsilon$, pour tous $x_1, x_2, s \in [0, 1]$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |Ku(x_1) - Ku(x_2)| &= \left| \int_0^1 (G(x_1, s) - G(x_2, s))u(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |G(x_1, s) - G(x_2, s)||u(s)|ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |u(s)|ds \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Ceci implique que $Ku \in C[0, 1]$.

Étape 2 : K est continu.

Pour tout $u \in L^2[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |Ku(x)| &= \left| \int_0^1 G(x, s)u(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |u(s)|ds \\ &\leq \left(\int_0^1 |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{L^2}, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Et il découle de (II.5) que

$$\|Ku\|_C \leq \|u\|_{L^2}, \quad u \in L^2[0, 1]. \quad (\text{II.6})$$

De puis, il est facile de voir de (II.6) et la définition de K que $K : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est linéaire et continu.

Étape 3 : On montre que l'ensemble $K(S)$ est précompact, où $S \subset L^2[0, 1]$ est une partie Bornée. Alors il existe $M > 0$, tel que $\|u\|_{L^2} \leq M$ pour tout $u \in S$, c'est-à-dire

$$S = \left\{ u \in L^2[0, 1], \quad \|u\|_{L^2} \leq M \right\}.$$

Il résulte de (II.6) et (II.4) que $K(S)$ est une famille uniformément bornée et équi-continue sur $[0, 1]$.

Selon le théorème d'Ascoli-Arzelà, $K(S)$ est une partie précompacte de $C[0, 1]$. Par conséquent, $K : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est complètement continu.

(2) Puisque $C[0, 1]$ s'injecte de manière continue dans $L^2[0, 1]$, c'est-à-dire

$$L^2[0, 1] \xrightarrow{K} C[0, 1] \xhookrightarrow{i} L^2[0, 1],$$

alors

$$i \circ K = K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1].$$

est aussi complètement continu.

■

Lemme II.2. $(Ku, v) = (u, Kv)$ pour tous $u, v \in L^2[0, 1]$, c'est-à-dire que K est symétrique.

Preuve.

Pour tous $u, v \in L^2[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |G(x, s)u(s)v(x)| ds dx &\leq \int_0^1 \int_0^1 |u(s)v(x)| ds dx \\ &\leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Alors d'après le théorème de Fubini et (ii) de la remarque (II.1), on a

$$\begin{aligned} (Ku, v) &= \int_0^1 \left[\int_0^1 G(x, s)u(s) ds \right] v(x) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 G(x, s)u(s)v(x) ds dx \\ &= \int_0^1 u(s) \left[\int_0^1 G(s, x)v(x) dx \right] ds \\ &= (u, Kv). \end{aligned}$$

■

Corollaire II.1. i) Il est facile de voir que toutes les valeurs propres de l'opérateur K sont $\left\{ \frac{4}{(2K-1)^2\pi^2} \right\}_{k=1}^{\infty}$, celles qui ont les fonctions propres orthonormales correspondantes $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\sqrt{2} \sin((2k-1)\pi x/2)\}_{k=1}^{\infty}$.

ii) Puisque K est linéaire complètement continu et symétrique par le lemme II.1 et II.2, d'après le théorème de Hilbert-Schmidt K vérifie les formules suivantes

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k) e_k, \quad u \in L^2[0, 1], \quad (\text{II.7})$$

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, e_k)|^2, \quad u \in L^2[0, 1], \quad (\text{II.8})$$

$$Ku = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} (u, e_k) e_k, \quad u \in L^2[0, 1]. \quad (\text{II.9})$$

Remarque II.2. D'après les lemmes II.1, II.2 et (II.9) que $K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ est positif, linéaire, borné et symétrique, donc $K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ la racine carrée positive de K existe et unique, il est également linéaire, bornée et symétrique avec $\|K^{1/2}\| = \|K\|^{1/2}$. En outre, on peut également prouver que $K^{1/2}L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est complètement continu.

Lemme II.3. $K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est un opérateur linéaire complètement continu, alors $K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ est aussi linéaire complètement continu.

Preuve. De (II.9) $K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ est de forme suivant

$$K^{1/2}u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} (u, e_k) e_k, \quad u \in L^2[0, 1]. \quad (\text{II.10})$$

Pour chaque $u \in L^2[0, 1]$ donnée et n, p deux nombres naturels, de (II.8) et

$|e_k(x)| \leq \sqrt{2}$ pour tout $x \in [0, 1], k = 1, 2, \dots$, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{2}{(2k-1)\pi} (u, e_k) e_k(x) \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{2\sqrt{2}}{(2k-1)\pi} |(u, e_k)| \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |(u, e_k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} \right)^{1/2} \|u\|, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{2\sqrt{2}}{(2k-1)\pi} |(u, e_k)| \right\|_C \leq \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} \right)^{1/2} \|u\| \rightarrow 0, \quad (\text{II.11})$$

$n \rightarrow \infty$.

Par conséquent la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} (u, e_k) e_k(x)$ converge uniformément avec respect de $x \in [0, 1]$ et $K^{1/2}u \in C[0, 1]$.

En outre, il est facile de voir de (II.11) que

$$\|K^{1/2}u\|_C \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} \right)^{1/2} \|u\| = \|u\|, \quad u \in L^2[0, 1]. \quad (\text{II.12})$$

On prend

$$T_n u = \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)\pi} (u, e_k) e_k, \quad u \in L^2[0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Alors $T_n : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est un opérateur linéaire complètement continu, $n=1, 2, \dots$, et il s'ensuit de (II.10) et (II.11) que

$$\|T_n - K^{1/2}\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2} \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Alors, $K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est un opérateur linéaire complètement continu et $K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ aussi est un opérateur linéaire complètement continu puisque $C[0, 1] \hookrightarrow L^2[0, 1]$.

■

Remarque II.3. *Il s'ensuit de (II.10) et (II.7) que*

$$(K^{1/2}u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} |(u, e_k)|^2, \quad u \in L^2[0, 1].$$

D'après ça et (II.8), on obtient que $K^{1/2}u \neq 0$ pour tout $u \in L^2[0, 1]$ avec $u \neq 0$. Par conséquent $K^{1/2}u_1 \neq K^{1/2}u_2$ pour tous $u_1, u_2 \in L^2[0, 1]$ avec $u_1 \neq u_2$.

Théorème II.1. (Principe des opérateurs fortement monotones)[1] *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel réflexif. Supposons que $T : X \rightarrow X'$ est un opérateur continu et il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$(Tu - Tv, u - v) \geq C\|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in X.$$

Alors $T : X \rightarrow X'$ est un homéomorphisme entre X et X' .

II.3 Résultats principaux

Dans cette partie, on s'occupe de l'existence d'une solution pour l'équation (II.1). On utilise le principe des opérateurs fortement monotones.

Lemme II.4. *i) L'équation opérationnelle*

$$u = KN_f u, \tag{II.13}$$

admet une solution dans $C[0, 1]$, si et seulement si, l'équation opérationnelle

$$v = K^{1/2} N_f K^{1/2} v \tag{II.14}$$

admet une solution dans $L^2[0, 1]$.

ii) L'unicité de solution pour les deux équations ci-dessus est également équivalente.

iii) Si (II.14) a une solution non nulle dans $L^2[0, 1]$, alors (II.13) admet aussi une solution non nulle dans $C[0, 1]$.

Preuve.

i) Soit $u \in C[0, 1]$ une solution de (II.13), c'est-à-dire

$$u = KN_f u,$$

alors, on a

$$\begin{aligned} K^{1/2} N_f K N_f u &= K^{1/2} N_f K^{1/2} K^{1/2} N_f u \\ &= K^{1/2} N_f K^{1/2} (K^{1/2} N_f u). \end{aligned}$$

Donc $v = K^{1/2} N_f u \in C[0, 1] \hookrightarrow L^2[0, 1]$ est une solution de (II.14).

D'autre part, soit $v \in L^2[0, 1]$ solution de (II.14), c'est-à-dire

$$v = K^{1/2} N_f K^{1/2} v,$$

alors

$$K^{1/2} v = K^{1/2} K^{1/2} N_f K^{1/2} v = K N_f (K^{1/2} v).$$

Donc, $u = K^{1/2} v \in C[0, 1]$ est une solution de (II.13).

ii) Supposons que (II.13) a une unique solution u dans $C[0, 1]$ et soit v_1, v_2 dans $L^2[0, 1]$ à la fois solutions de (II.14), c'est-à-dire

$$v_1 = K^{1/2}N_f K^{1/2}v_1 \quad \text{et} \quad v_2 = K^{1/2}N_f K^{1/2}v_2,$$

et puis

$$K^{1/2}v_1 = KN_f K^{1/2}v_1 \quad \text{et} \quad K^{1/2}v_2 = KN_f K^{1/2}v_2,$$

alors, on a $K^{1/2}v_1$ et $K^{1/2}v_2$ sont deux solutions de (II.13) et il s'ensuit à partir de l'hypothèse que

$$K^{1/2}v_1 = K^{1/2}v_2 = u,$$

donc

$$\begin{aligned} v_1 &= K^{1/2}N_f K^{1/2}v_1 \\ &= K^{1/2}N_f K^{1/2}v_2 \\ &= v_2. \end{aligned}$$

D'autre part, supposons que (II.14) a une solution v dans $L^2[0, 1]$ et soit u_1 et u_2 dans $C[0, 1]$ deux solutions de (II.13), c'est-à-dire

$$u_1 = KN_f u_1 \quad \text{et} \quad u_2 = KN_f u_2,$$

alors

$$K^{1/2}N_f u_1 = K^{1/2}N_f K^{1/2}K^{1/2}N_f u_1,$$

et

$$K^{1/2}N_f u_2 = K^{1/2}N_f K^{1/2}K^{1/2}N_f u_2,$$

donc $K^{1/2}N_f u_1$ et $K^{1/2}N_f u_2$ sont deux solutions de (II.14). Il résulte de l'hypothèse que

$$K^{1/2}N_f u_1 = K^{1/2}N_f u_2 = v.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_1 &= KN_f u_1 \\ &= K^{1/2}N_f K^{1/2}u_1 \\ &= K^{1/2}N_f K^{1/2}u_2 \\ &= u_2. \end{aligned}$$

iii) Il ressort de la preuve de *i*) que si $v \in L^2[0, 1]$ est une solution de (II.14), alors $K^{1/2}v$ est une solution de (II.13) dans $C[0, 1]$. Par conséquent, la remarque (II.3) donne la conclusion. ■

Théorème II.2. *Supposons que pour chaque $x \in [0, 1]$, $f(x, u)$ est une fonction décroissante en u , c'est-à-dire $f(x, u_1) \geq f(x, u_2)$ pour tous u_1 et u_2 dans \mathbb{R} avec $u_1 \leq u_2$. Alors le problème aux limites (II.1) admet une solution unique dans $C^2[0, 1]$.*

Preuve. Il résulte du lemme II.4 que l'équation opérationnelle (II.13) a une solution unique dans $C[0, 1]$, si et seulement si, (II.14) a une unique solution dans $L^2[0, 1]$, par conséquent, il est équivalent de dire que l'équation opérationnelle $Tv = 0$ a une unique solution dans $L^2[0, 1]$ avec $T = I - K^{1/2}N_fK^{1/2}$.

Étape 1 : On montre que T est continu.

D'après le lemme II.3, $K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1] \hookrightarrow L^2[0, 1]$ est continu, donc $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ est aussi continu.

Étape 2 : D'après le théorème II.1, il est seulement nécessaire de vérifier que T est un opérateur fortement monotone. En effet, pour tous u et v dans $L^2[0, 1]$, puisque $f(x, u)$ est une fonction décroissante en u pour chaque $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} (N_fK^{1/2}u - N_fK^{1/2}v, K^{1/2}u - K^{1/2}v) &= \int_0^1 [f(x, K^{1/2}u(x)) \\ &\quad - f(x, K^{1/2}v(x))] [K^{1/2}u(x) - K^{1/2}v(x)] dx \leq 0. \end{aligned}$$

Et en utilisant le lemme II.2, on a

$$\begin{aligned} (Tu - Tv, u - v) &= (u - v - K^{1/2}N_fK^{1/2}u + K^{1/2}N_fK^{1/2}v, u - v) \\ &= \|u - v\|_{L^2}^2 - (K^{1/2}(N_fK^{1/2}u - N_fK^{1/2}v), u - v) \\ &= \|u - v\|_{L^2}^2 - (N_fK^{1/2}u - N_fK^{1/2}v, K^{1/2}u - K^{1/2}v) \\ &\geq \|u - v\|_{L^2}^2, \quad u, v \in L^2[0, 1]. \end{aligned}$$

Ainsi T est un opérateur fortement monotone. Alors le théorème II.1 implique que $Tv = 0$ a une unique solution v^* dans $L^2[0, 1]$.

C'est-à-dire

$$v^* = K^{1/2} N_f K^{1/2} v^*.$$

■

Corollaire II.2. *S'il existe une constante $a \in [0, \pi^2/4)$, telle que*

$$[f(x, u) - f(x, v)][u - v] \leq a|u - v|^2, \quad \text{pour tous } x \in [0, 1], \text{ et } u, v \in \mathbb{R},$$

alors, le problème aux limites (II.1) admet une solution unique dans $C^2[0, 1]$.

Preuve. De la même manière que dans la preuve du théorème II.2, il est seulement nécessaire de noter que pour tous $u, v \in L^2[0, 1]$

$$\begin{aligned} (N_f K^{1/2} u - N_f K^{1/2} v, K^{1/2} u - K^{1/2} v) &= \int_0^1 [f(x, K^{1/2} u(x)) - f(x, K^{1/2} v(x))] [K^{1/2} u(x) \\ &\quad - K^{1/2} v(x)] dx \\ &\leq a \int_0^1 |K^{1/2} (u - v)(x)|^2 dx \\ &= a \|K^{1/2} (u - v)\|^2 \\ &\leq \frac{4a}{\pi^2} \|u - v\|_{L^2}^2, \quad (\text{car } \|(K^{1/2})^2\|_{L^2} = \|K\|_{L^2} \leq \frac{4}{\pi^2}). \end{aligned}$$

Et puis

$$\begin{aligned} (Tu - Tv, u - v) &= (u - v - K^{1/2} N_f K^{1/2} u + K^{1/2} N_f K^{1/2} v, u - v) \\ &= \|u - v\|_{L^2}^2 - (N_f K^{1/2} u - N_f K^{1/2} v, K^{1/2} u - K^{1/2} v) \\ &\geq \|u - v\|_{L^2}^2 - \frac{4a}{\pi^2} \|u - v\|_{L^2}^2 \\ &= \left(1 - \frac{4a}{\pi^2}\right) \|u - v\|_{L^2}^2, \quad u, v \in L^2[0, 1]. \end{aligned}$$

■

CHAPITRE III

EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR BVP PAR LA THÉORIE DE POINT CRITIQUE

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence de solution du problème aux limites précédent.

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), & x \in [0, 1], \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Où $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Tel que, on y discute les techniques de recherche de points critiques pour des fonctionnelles sur un espace de Banach.

III.2 Préliminaires

Dans cette section, on rappelle quelques lemmes essentiels et quelques théorèmes de base comme le lemme de col et théorème de minimisation qui sont nécessaires par la suite.

Lemme III.1. Soit $\phi(u) = \int_0^1 \int_0^{u(x)} f(x, v) dv dx$, $u \in C[0, 1]$. Alors

i) $\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est Fréchet différentiable sur $C[0, 1]$ et

$$(\phi'(u))(w) = (N_f u, w) = \int_0^1 f(x, u(x)) w(x) dx \text{ pour tous } u, w \in C[0, 1].$$

ii) $\phi \circ K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est Fréchet différentiable dans $L^2[0, 1]$ et

$$(\phi \circ K^{1/2})'(v) = K^{1/2} N_f K^{1/2} v \text{ pour tout } v \in L^2[0, 1].$$

Preuve.

i) Pour chaque $u \in C[0, 1]$. On définit une fonctionnelle linéaire bornée

$$h(w) = (N_f u, w) = \int_0^1 f(x, u(x))w(x)dx \quad \text{pour tout } w \in C[0, 1].$$

Alors

$$\begin{aligned} \phi(u + w) - \phi(u) - h(w) &= \int_0^1 \int_{u(x)}^{u(x)+w(x)} f(x, v)dvdx - \int_0^1 f(x, u(x))w(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x, u(x) + \theta w(x))w(x)dx - \int_0^1 f(x, u(x))w(x)dx \\ &= \int_0^1 [f(x, u(x) + \theta w(x)) - f(x, u(x))]w(x)dx, \quad w \in C[0, 1], \end{aligned}$$

tel que $\theta \in (0, 1)$. Et puisque f est continue dans $[0, 1] \times [-\|u\|_C - 1, \|u\|_C + 1]$, on

a

$$\lim_{\|w\|_C \rightarrow 0} \frac{1}{\|w\|_C} \int_0^1 [f(x, u(x) + \theta w(x)) - f(x, u(x))]w(x)dx = 0.$$

Alors, ϕ est Fréchet différentiable dans $C[0, 1]$ et $(\phi'(u))(w) = h(w) = (N_f u, w)$ pour tous $u, w \in C[0, 1]$.

ii) Par la règle de la chaîne pour les dérivés de l'opérateur composite, il s'ensuit que la fonctionnelle $\phi \circ K^{1/2}$ est Fréchet différentiable sur $L^2[0, 1]$ et

$$(\phi \circ K^{1/2})'(v) = \phi'(K^{1/2}v) \circ K^{1/2} \quad \text{pour tout } v \in L^2[0, 1].$$

C'est

$$\begin{aligned} ((\phi \circ K^{1/2})'(v))(k) &= (\phi'(K^{1/2}v) \circ K^{1/2})(k) \\ &= (\phi'(K^{1/2}v))(K^{1/2}k) \\ &= (N_f K^{1/2}v, K^{1/2}k) \\ &= (K^{1/2}N_f K^{1/2}v, k), \quad \text{pour tous } v, k \in L^2[0, 1]. \end{aligned}$$

Alors

$$(\phi \circ K^{1/2})'(v) = K^{1/2}N_f K^{1/2}v \quad \text{pour tout } v \in L^2[0, 1].$$

■

Théorème III.1. [10] Soit X un espace de Banach réflexif et $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose

- i) J coercive et $J \neq +\infty$, c'est-à-dire $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$,
- ii) J s.c.i pour la convergence faible. Alors il existe $u \in X$, tel que

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v) \quad (< +\infty).$$

Si de plus J est Gâteaux-différentiable en u , alors $d_G J(u) = 0$.

Définition III.1. (Suites de Palais-Smale) Soit J une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach X . On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Palais-Smale pour la fonctionnelle J , si

$$|J(u_n)| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}^+,$$

$$\|dJ(u_n)\|_{X'} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Définition III.2. (Condition de Palais-Smale) On dit qu'une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach X vérifie la condition de Palais-Smale, si de toute suite de Palais-Smale on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans X (la limite est alors un point critique). En d'autres termes, J vérifie (P.S) (écriture abrégée pour J vérifie la condition de Palais-Smale), si $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X , telle que

$$|J(u_n)| \leq C,$$

$$\|dJ(u_n)\|_{X'} \rightarrow 0, \quad \text{dans } X'.$$

On peut extraire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge fortement dans X .

Théorème III.2. (Lemme de Col)[8] Soit X un espace de Banach réel et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfait la condition (P.S). Supposons que

- i) $J(0) = 0$.
- ii) Il existe $\rho > 0$ et $\alpha > 0$, tel que $J(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in X$ avec $\|u\| = \rho$.
- iii) Il existe u_1 dans X avec $\|u_1\| \geq \rho$, tel que $J(u_1) < \alpha$.

Alors J possède une valeur critique $c \geq \alpha$. De plus, c peut être caractérisée par

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g[0,1]} f(u).$$

Où $\Gamma = \{g \in C([0, 1]; E) : g(0) = 0, g(1) = u_1\}$.

III.3 Résultats principaux

Théorème III.3. *Supposons que*

$$\int_0^u f(x, v) dx \leq \frac{a}{2} u^2 + b(x) |u|^{2-\gamma} + c(x), \quad x \in [0, 1], \quad u \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.1})$$

où $a \in [0, \pi^2/4)$, $\gamma \in (0, 2)$, $b \in L^{2/\gamma}[0, 1]$ et $c \in L^1[0, 1]$. Alors le problème aux limites (II.1) admet au moins une solution dans $C^2[0, 1]$.

Preuve. D'après le lemme (II.4) il est seulement nécessaire de montrer que l'équation opérationnelle $v - K^{1/2} N_f K^{1/2} v = 0$ admet au moins une solution dans $L^2[0, 1]$.

Étape 1 : J est (f.s.c.i).

On considère la fonctionnelle $J : L^2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J(v) = \frac{1}{2}(v, v) - (\phi \circ K^{1/2})(v), \quad v \in L^2[0, 1], \quad (\text{III.2})$$

où ϕ est définie dans le lemme (III.1).

On montre que J est faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i). En utilisant le lemme (III.1), on a

$$J'(v) = v - K^{1/2} N_f K^{1/2} v \quad \text{pour tout } v \in L^2[0, 1].$$

Il résulte du lemme (II.3) que $K^{1/2} N_f K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ est complètement continu. D'après la proposition (I.5), la fonctionnelle $\phi(K^{1/2})$ est faiblement continue, donc elle est faiblement semi-continue supérieurement, et par conséquent $-\phi(K^{1/2})$ est faiblement semi-continue inférieurement.

Comme la fonctionnelle $v \mapsto \frac{1}{2}(v, v)$ est une fonctionnelle faiblement semi-continue inférieurement (voir l'exemple (I.1) dans le chapitre I), on conclut que J est une fonctionnelle faiblement semi-continue inférieurement sur $L^2[0, 1]$.

Étape 2 : J est coercive.

D'après l'hypothèse III.1, on a

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}(v, v) - \int_0^1 \int_0^{K^{1/2}v(x)} f(x, u) du dx \\ &\geq \frac{1}{2}(v, v) - \frac{a}{2} \int_0^1 |K^{1/2}v(x)|^2 dx - \int_0^1 b(x) |K^{1/2}v(x)|^{2-\gamma} dx - \int_0^1 c(x) dx, \end{aligned}$$

donc, par la remarque II.2, corollaire I.2 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}(v, v) - \int_0^1 \int_0^{K^{1/2}v(x)} f(x, u) du dx \\ &\geq \frac{1}{2}(v, v) - \frac{a}{2} \int_0^1 |K^{1/2}v(x)|^2 dx - \int_0^1 b(x) |K^{1/2}v(x)|^{2-\gamma} dx - \int_0^1 c(x) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{L^2}^2 - \frac{a}{2} (K^{1/2}v, K^{1/2}v) - \left(\int_0^1 |b(x)|^{\frac{2}{\gamma}} dx \right)^{\gamma/2} \left(\int_0^1 |K^{1/2}v(x)|^2 dx \right)^{1-\gamma/2} - c_1 \\ &= \frac{1}{2} \|v\|_{L^2}^2 - \frac{a}{2} (Kv, v) - b_1 (Kv, v)^{1-\gamma/2} - c_1 \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{L^2}^2 - \frac{4a}{2\pi^2} \|v\|_{L^2}^2 - b_1 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2-\gamma} \|v\|_{L^2}^{2-\gamma} - c_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4a}{\pi^2} \right) \|v\|_{L^2}^2 - b_1 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2-\gamma} \|v\|_{L^2}^{2-\gamma} - c_1. \end{aligned}$$

Où $b_1 = \left(\int_0^1 |b(x)|^{2/\gamma} dx \right)^{\gamma/2}$, $c_1 = \int_0^1 c(x) dx$.

Donc $\lim_{\|v\|_{L^2} \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$. Par conséquent, selon le théorème (III.1), il existe $v_0 \in L^2[0, 1]$, tel que $J'(v_0) = 0$, c'est-à-dire

$$v_0 - K^{1/2} N_f K^{1/2} v_0 = 0.$$

■

Théorème III.4. *Supposons que*

(H₁) *Il existe $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ et $M > 0$, tel que $F(x, u) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^u f(x, v) dv \leq \mu u f(x, u)$ pour tous $x \in [0, 1]$ et $|u| \geq M$,*

(H₂) *$\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} < \frac{\pi^2}{4}$ et $\liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u} > \frac{\pi^2}{4}$ uniformément pour $x \in [0, 1]$.*

Alors, le problème aux limites (II.1) admet au moins une solution non nulle dans $C^2[0, 1]$.

Preuve. Par (iii) du lemme (II.4), on a besoin seulement de montrer que l'équation opérationnelle $v - K^{1/2} N_f K^{1/2} v = 0$ admet au moins une solution non nulle dans $L^2[0, 1]$. On considère la fonctionnelle J définie par (III.2) et on va vérifier que J est satisfait toutes les conditions du théorème (III.2) (lemme du Col).

Étape 1 : J satisfait la condition (P.S).

Puisque $F(x, u) - \mu u f(x, u)$ est continue sur $[0, 1] \times [-M, M]$, il existe $C > 0$, telle que

$$F(x, u) \leq \mu u f(x, u) + C, \quad x \in [0, 1], u \in [-M, M].$$

Par l'hypothèse (H_1) , on obtient

$$F(x, u) \leq \mu u f(x, u) + C, \quad x \in [0, 1], u \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.3})$$

Soit $(v_n) \subset L^2[0, 1]$ avec $|J(v_n)| \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\beta > 0$ est une constante et $J'(v_n) = (I - K^{1/2} N_f K^{1/2})v_n \rightarrow 0$, on note que

$$\begin{aligned} (J'(v_n), v_n) &= (v_n - K^{1/2} N_f K^{1/2} v_n, v_n) \\ &= \|v_n\|_{L^2}^2 - (N_f K^{1/2} v_n, K^{1/2} v_n) \quad (\text{car } K^{1/2} \text{ est symétrique}) \\ &= \|v_n\|_{L^2}^2 - \int_0^1 f(x, K^{1/2} v_n) K^{1/2} v_n(x) dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 f(x, K^{1/2} v_n) K^{1/2} v_n(x) dx = \|v_n\|_{L^2}^2 - (J'(v_n), v_n).$$

Il résulte de (III.3) et la définition de J que

$$\begin{aligned} \beta \geq J(v_n) &= \frac{1}{2} \|v_n\|_{L^2}^2 - \int_0^1 F(x, K^{1/2} v_n(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|v_n\|_{L^2}^2 - \mu \int_0^1 f(x, K^{1/2} v_n(x)) K^{1/2} v_n(x) dx - C \\ &= \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \|v_n\|_{L^2}^2 + \mu (J'(v_n), v_n) - C \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \|v_n\|_{L^2}^2 - \mu \|J'(v_n)\|_{L^2} \|v_n\|_{L^2} - C, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Puisque $J'(v_n) \rightarrow 0$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\beta \geq \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \|v_n\|_{L^2}^2 - \|v_n\|_{L^2} - C, \quad \forall n > N_0. \quad (\text{III.4})$$

Ceci implique que $(v_n) \subset L^2[0, 1]$ est une suite bornée.

En effet, supposons par l'absurde que $\|v_n\|_{L^2}$ n'est pas bornée, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_{L^2} = +\infty.$$

Alors, d'après l'inégalité (III.4), on a

$$\left(\frac{1}{2} - \mu \right) \|v_n\|_{L^2} \leq 1 - \frac{C + \beta}{\|v_n\|_{L^2}}, \quad \forall n > N_0.$$

Donc par le passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, et en tenant compte $0 < \mu < \frac{1}{2}$, on obtient $+\infty \leq 1$ (ceci en contradiction).

Et comme $v_n - K^{1/2}N_f K^{1/2}v_n \rightarrow 0$, on peut en déduire que (v_n) admet une sous-suite convergente.

En effet, puisque $K^{1/2} : L^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est un opérateur complètement continu et la suite (v_n) est bornée, alors la suite $(K^{1/2}v_n)$ admet une sous-suite convergente qu'on note sans perte de généralité par (v_n) , c'est-à-dire $(K^{1/2}v_n) \rightarrow y_0$, et comme $N_f : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ est un opérateur continu, donc $(N_f K^{1/2}v_n) \rightarrow N_f y_0$. Comme $K^{1/2}$ est continu aussi, on déduit que

$$K^{1/2}N_f K^{1/2}v_n \rightarrow K^{1/2}N_f y_0.$$

On pose $u_n = K^{1/2}N_f K^{1/2}v_n$, alors $u_n \rightarrow u_0 = K^{1/2}N_f y_0$ et donc $v_n - u_n \rightarrow 0$. Ceci implique que $v_n \rightarrow u_0$, c'est-à-dire (v_n) converge vers u_0 .

Étape 2 : J satisfait la première condition géométrique.

D'après l'hypothèse $\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} < \frac{\pi^2}{4}$ uniformément par rapport à $x \in [0, 1]$, il existe $\varepsilon \in (0, 1)$ et $\delta > 0$, tel que

$$f(x, u) \leq (1 - \varepsilon)(\pi^2/4)u, \quad \text{pour tout } x \in [0, 1] \text{ et } u \in [0, \delta],$$

et

$$f(x, u) \geq (1 - \varepsilon)(\pi^2/4)u, \quad \text{pour tout } x \in [0, 1] \text{ et } u \in [-\delta, 0].$$

Il s'ensuit que

$$f(x, u) \leq (1 - \varepsilon)(\pi^2/4)|u|, \quad \forall x \in [0, 1], |u| \leq \delta.$$

Par intégration, on obtient

$$F(x, u) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^u f(x, v)dv \leq (1/8)(1 - \varepsilon)\pi^2|u|^2 \quad x \in [0, 1], \quad \forall |u| \leq \delta. \quad (\text{III.5})$$

Soit $\rho = \delta$ et $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon\rho^2$. Il s'ensuit donc de (II.12) que

$$\|K^{1/2}v\|_C \leq \|v\|_{L^2} = \delta, \quad \text{pour tout } v \in \partial B_\rho,$$

où

$$B_\rho = \{v \in L^2[0, 1] : \|v\|_{L^2} < \rho\}.$$

Donc par (III.5), on a

$$\begin{aligned}
 J(v) &= \frac{1}{2}(v, v) - \int_0^1 \int_0^{K^{1/2}v(x)} f(x, u) du dx \\
 &= \frac{1}{2}(v, v) - \int_0^1 F(x, K^{1/2}v(x)) dx \\
 &\geq \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{8}(1 - \varepsilon)\pi^2 \int_0^1 (K^{1/2}v(x))^2 dx \\
 &= \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{8}(1 - \varepsilon)\pi^2 (K^{1/2}, K^{1/2}v) \\
 &= \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{8}(1 - \varepsilon)\pi^2 (Kv, v) \quad (\text{car } K^{1/2} \text{ est symétrique}) \\
 &\geq \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{8}(1 - \varepsilon)\pi^2 \frac{4}{\pi^2} \|v\|_{L^2}^2 \quad (\text{car } \|K\|_{L^2} \leq \frac{4}{\pi^2}) \\
 &= \frac{1}{2}\varepsilon\|v\|_{L^2}^2, \quad v \in \partial B_\rho.
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Cela implique que $\inf_{v \in \partial B_\rho} J(v) \geq \frac{1}{2}\varepsilon\rho^2 = \alpha > 0$.

Puisque $K^{1/2}0 = 0$ et à partir la définition de J , il est évident que $J(0) = 0$.

Étape 3 : J satisfait la deuxième condition géométrique.

D'autre part, à partir de $\liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u} > \frac{\pi^2}{4}$ uniformément par rapport à $x \in [0, 1]$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\tau > 0$, tels que

$$f(x, u) \geq \frac{\pi^2}{4}(1 + \varepsilon)u, \quad x \in [0, 1], \quad u \in [\tau, +\infty[.$$

Puisque $f(x, u) - \frac{\pi^2}{4}(1 + \varepsilon)u$ est continue sur $[0, 1] \times [0, \tau]$, donc il existe $M > 0$, tel que

$$f(x, u) \geq \frac{\pi^2}{4}(1 + \varepsilon)u - M, \quad x \in [0, 1], \quad u \in [0, \tau].$$

Ainsi, les deux inégalités impliquent que

$$f(x, u) \geq \frac{\pi^2}{4}(1 + \varepsilon)u - M, \quad x \in [0, 1], \quad u \geq 0.$$

Par conséquent,

$$F(x, u) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^u f(x, v) dv \geq \frac{1}{8}\pi^2(1 + \varepsilon)u^2 - Mu, \quad x \in [0, 1], \quad u \geq 0. \tag{III.8}$$

Soit $v_0 = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2}x = e_1$, $x \in [0, 1]$. Alors

$$v_0 \in L^2[0, 1], \quad \|v_0\| = \left(\int_0^1 2 \sin^2 \frac{\pi}{2}x dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

et

$$\begin{aligned}
 K^{1/2}v_0(x) &= \int_0^1 G(x, s)\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} s ds \\
 &= \frac{4}{\pi^2} \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} x \\
 &= \frac{4}{\pi^2} v_0(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^1 K^{1/2}v_0(x)dx = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2},$$

alors, il résulte de l'équation (III.8) que

$$\begin{aligned}
 J(sv_0) &= \frac{1}{2}(sv_0, sv_0) - \int_0^1 F(x, sK^{1/2}v_0(x))dx \\
 &= \frac{1}{2}(sv_0, sv_0) - \int_0^1 F(x, K^{1/2}sv_0(x))dx \\
 &\leq \frac{1}{2}s^2 - \frac{\pi^2}{8}(1 + \varepsilon) \int_0^1 (K^{1/2}sv_0(x))^2 dx + sM \int_0^1 K^{1/2}v_0(x)dx \\
 &= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^2(1 + \varepsilon) + \frac{2}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} Ms \\
 &= -\frac{1}{2}\varepsilon s^2 + \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} Ms, \quad s > 0.
 \end{aligned}$$

Donc $J(sv_0) \rightarrow -\infty$ et $\|sv_0\|_{L^2} \rightarrow +\infty$ quand $s \rightarrow +\infty$. Alors, il existe un nombre assez grand $s_0 > \rho$ de telle sorte que $v_1 = s_0 v_0 \in L^2[0, 1]$, $v_1 \notin \overline{B}_\rho$, et $J(v_1) < 0$.

Ainsi, selon le lemme du Col, J admet une valeur critique $c^* > 0$, c'est-à-dire. Il existe $v^* \in L^2[0, 1]$, tel que

$$J(v^*) = c^*, \quad J'(v^*) = v^* - K^{1/2}N_f K^{1/2}v^* = 0.$$

Il est évident que $v^* \neq 0$ puisque $J(0) = 0$.

■

Remarque III.1. *S'il existe $p > 0$ et $A \in (0, +\infty]$, tel que*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{|u|^p u} = A, \quad \text{uniformément par rapport à } x \in [0, 1], \quad (\text{III.9})$$

alors l'hypothèse (H_1) est satisfaite.

En effet, soit $\mu \in \left(\frac{1}{p+2}, \frac{1}{2}\right)$. Il s'ensuit de (III.9) que

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_0^u f(x, v) dv - \mu u f(x, u)}{|u|^p u^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_0^u f(x, v) dv}{|u|^p u^2} - \frac{\mu u f(x, u)}{|u|^p u^2} \right) \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x, u)}{(p+2)|u|^p u} - \frac{\mu f(x, u)}{|u|^p u} \right) \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{|u|^p u} \left(\frac{1}{p+2} - \mu \right) \\
 &= A \left(\frac{1}{p+2} - \mu \right) < 0.
 \end{aligned}$$

Donc, il existe une constante $M > 0$, tel que

$$F(x, u) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^u f(x, v) dv \leq \mu u f(x, u) \text{ pour tout } x \in [0, 1] \text{ et } |u| \geq M.$$

C'est-à-dire (H_1) est satisfaite.

III.4 Exemples d'application

Dans cette section, on donne quelque exemples.

Exemple III.1. *On considère le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -u''(x) = au(x) + b(x)|u(x)|^p + c(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Où $a \in [0, \pi^2/4)$, $p \in (0, 1)$, b et c sont continues sur $[0, 1]$ et $c(x) \not\equiv 0$.

Il est facile de vérifier que (III.1) est satisfait. Par conséquent, il découle du théorème III.3 que ce problème aux limites admet au moins une solution dans $C^2[0, 1]$. Et il est facile de voir que cette solution non nulle avec $c(x) \not\equiv 0$.

Exemple III.2. *On a le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -u''(x) = au(x) + b(x) \arctan u(x) \ln(1 + u^2(x)) + c|u(x)|^p u(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Où $a \in [0, \pi^2/4)$, $p, c > 0$, b est continue sur $[0, 1]$.

Il est évident que $f(x, u) = au(x) + b(x) \arctan u(x) \ln(1 + u^2(x)) + c|u(x)|^p u(x)$,

$x \in [0, 1]$, $u \in \mathbb{R}$ est impaire par rapport à $u \in \mathbb{R}$. Par un calcul, on a

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} = a < \frac{\pi^2}{4}, \quad \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u} = +\infty,$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{|u|^p u} = c > 0, \quad \text{uniformément pour tout } x \in [0, 1].$$

Il résulte de la remarque (III.1) que l'hypothèse (H_1) est satisfaite. D'après le lemme de Col, le problème aux limites (III.10) admet au moins une solution.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a étudié un problème aux limites d'ordre deux posés sur l'intervalle borné $[0, 1]$ par des méthodes variationnelles, ainsi la théorie des points critiques ainsi que le principe des opérateurs fortement monotone.

Dans un premier temps, on a étudié ce problème aux limites associés à conditions mixtes sur l'intervalle $[0, 1]$ et on a utilisé le principe des opérateurs fortement monotone pour montrer l'existence de solutions.

En fin, on a étudié l'existence des solutions pour même équation différentielle. Notre approche est variationnelle et les solutions sont obtenues comme des minimums ou des points critiques de type passage du col (mountain pass) d'une certaine fonctionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.E. TAYLOR ET D.C. LAY. *Introduction to functional analysis*. Wiley (1980).
- [2] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications, III : Variational methods and optimization*, Springer, New York, (1985).
- [3] F. LI, Z. LIANG ET Q. ZHANG, Existence of solutions to a class of nonlinear second order two-point boundary value problems, *J. Mathematical Analysis and Application* **312(2005)**, 357-373.
- [4] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris,(1983).
- [5] L. JIANLI, C. HUIWEN ET H. ZHIMIN . *Multiplicity of solution for impulsive differential equation on the half-line via variational methods*. Boundary Value Problems , **14(2016)**, 1364-1375.
- [6] L. JIAQUAN, Z. PINGAN ET X. MING. Positive solutions for singular boundary value problem of second order, *Chin. Ann. Math*, **3(2004)**, 383-392.
- [7] M. JAROSLAV ET D. PAVEL, *Methods of Nonlinear Analysis Applications to Differential Equations*. Birkhäuser advanced texts, Basler (2007).
- [8] P.H. RABINOWITZ, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS regional conference series in mathematics, no. 65, American mathematical society, Providence, RI (1986).
- [9] P. RADU, *Methods in nonlinear integral equations*. Kluwer Academic, Dordrecht (2002).
- [10] S. FORMINE ET A. KOLMOGOROV, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction française, Édition Mir. Moscou, (1977).

- [11] V. TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Édition, Mir. Moscou (1985).